Universidad Autónoma de Madrid
Lógica Matemática Hoja 7

1. Sea L un lenguaje y T una L-teoría que tenga modelos finitos arbitrariamente grandes. Demuestra que T tiene un modelo infinito.

2. Sea $L = \{\cdot, 1\}$, lenguaje de grupos, y T una L-teoría cuyos modelos sean grupos.

   (a) Demuestra que existe una L-fórmula que define el el centro del grupo en cada modelo de T.

   (b) Supón ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un modelo de T en cuyo universo existe un elemento a tal que el orden de a, $o(a)$, es finito y $o(a) > n$. Demuestra que no existe una fórmula $\varphi(x) \in For(L)$ que defina en todo modelo $\mathcal{B}$ de T, el subconjunto de B de los elementos de torsión –elementos de B de orden finito–.

3. Sea L un lenguaje.Un L-teoría tiene una *axiomatización universal* en L si tiene una axiomatización con enunciados del tipo $\forall z_1 \cdots \forall z_n G$, donde G es una L-fórmula sin cuantificadores.

   (a) Da ejemplos de teorías que tengan una axiomatización universal en L.

   (b) Demuestra que si T es una L-teoría y tiene una axiomatización universal en L entonces toda subestructura de un modelo de T es modelo de T.

   (c) Da ejemplos de L-teorías que no tengan una axiomatización universal en L.

4. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y $\mathbb{F}_p$ el cuerpo de p elementos. Demuestra que la teoría de $\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales no triviales es κ-categórica para todo cardinal infinito κ. ¿Es completa?

5. Sea G un grupo infinito. Un conjunto X es un G-*conjunto* si existe una acción de G sobre X, es decir, una aplicación de $G \times X$ en X ($(g, x) \mapsto g \cdot x$) tal que $1 \cdot x = x$, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, para todo $x \in X$ y $g, h \in G$. Se dice que un G-conjunto X es *libre* si para todo $g \in G$, $g \neq 1$ implica $g \cdot x \neq x$, para todo $x \in X$.

   (a) Recuerda que para cada $x \in X$, la *órbita* de x es $\operatorname{orb}(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$, que la relación $x \sim y \Leftrightarrow$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$ es una relación de equivalencia en X. ¿Cuáles son las clases de equivalencia? Demuestra que $\operatorname{card}(\operatorname{orb}(x)) = \operatorname{card}(G)$.

   (b) Sea $L_G = \{\lambda_g : g \in G\}$, donde los λ_g son símbolos de funciones unarias. Escribe los enunciados de la L_G-teoría T_G de G-conjuntos libres.

   (c) Aplica el Teorema de Vaught para concluir que la L_G-teoría T_G es completa.

6. Sean L un lenguaje y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos L-estructuras. Un *isomorfismo parcial* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es una biyección $\gamma : X \to Y$ con $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, para toda L-fórmula sin cuantificadores $F(x_1, \ldots, x_n)$ y para todo $a_1, \ldots, a_n \in X$,

$$\mathcal{A} \models F[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models F[\gamma a_1 \ldots, \gamma a_n].$$

   Un *sistema de vaivén* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es una familia no vacía Γ de isomorfismos parciales tal que

   (i) para todo $\gamma \in \Gamma$ y $a \in A$ existe una extensión γ' de γ con $a \in \operatorname{dom} \gamma'$;

   (ii) para todo $\gamma \in \Gamma$ y $b \in B$ existe una extensión γ' de γ con $b \in \operatorname{im} \gamma'$.

   (a) Demuestra que si φ es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, $\{\varphi\}$ es un sistema de vaivén de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

   (b) Sea L un lenguaje numerable y T una L-teoría coherente y sin modelos finitos. Si para todo $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ modelos numerables de T existe un sistema de vaivén de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ entonces T es $\aleph_0$-categórica y completa.